

Mag. Roman Knor

HT 98/99

Schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik

Erlaubte Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung, Computeralgebrasystem TI-92

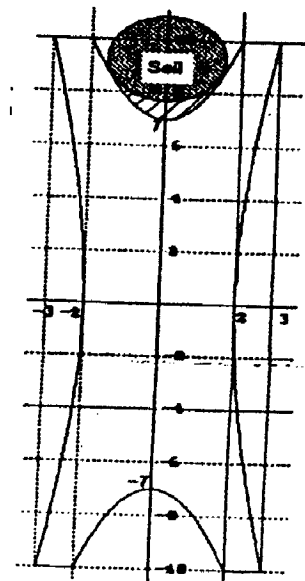
Wichtige Hinweise für die Bearbeitung

Zur Lösung der folgenden Aufgaben dürfen nur die während des Unterrichts verwendeten Module und Programme verwendet werden. Weiters sind alle Rechnereingaben in nachvollziehbarer Art und Weise zu dokumentieren.

Beispiel 1:

Aus einer zylindrischen Scheibe mit $r = 10\text{cm}$ und $h = 6\text{cm}$ wird eine Seilrolle herausgearbeitet. Die Rille hat einen parabelförmigen Querschnitt, die sind

- hyperbolisch. (s. nebenstehende Skizze, Maße in cm).
- Wie viel Prozent macht der Abfall aus?
 - Wie schwer ist die Rolle ($\Delta = 7,65\text{kg/dm}^3$)?
 - Begründe kurz die in Punkt a) verwendete Volumensformeln!
 - Um diese Rolle für verschiedene Seilquerschnitte verwenden zu können, wird der entstehende Hohlraum (in der Skizze schraffiert dargestellt) mit einem speziellen Kunststoff aufgefüllt. Stelle die dafür benötigte Menge als Funktion des Seilradius für $10\text{mm} \leq r \leq 20\text{mm}$ auf beiliegendem Millimeterpapier grafisch dar.
(Einheiten: r : 1mm ... 1 cm; V : 1 cm^3 ... 0,5cm)



Beispiel 2:

Um den Ausschussanteil p von Glühbirnen zu bestimmen, werden in regelmäßigen Abständen Stichproben von gleichem Umfang n entnommen und auf Fehler untersucht. Für die Anzahl X der schadhafte Glühbirnen ergab sich folgende Bilanz:

2, 5, 0, 1, 0, 3, 5, 4, 3, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 2, 0, 5, 2

- a) Bestimme Mittelwert und Standardabweichung von X , den Ausschussanteil p sowie den Stichprobenumfang n .
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Hunderterpackung mindestens 80 Glühbirnen einwandfrei bzw. höchstens 5 Birnen schadhaft?
- c) Die Brenndauer von Glühbirnen sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 1200h und der Standardabweichung 200 h.
 - c1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne eine Brenndauer von mindestens 1000 h erreicht?
 - c2) Welche Brenndauer muss eine Glühbirne mindestens erreichen, um dem Slogan "10% der Glühbirnen sind Dauerbrenner" gerecht zu werden?
 - c3) Von wie vielen Prozent der Glühbirnen fällt die Brenndauer in das Intervall $[-\Phi, +\Phi]$?
- d) Erkläre den Unterschied zwischen der Binomial- und der Normalverteilung!

Beispiel 3:

Im Zuge des zweigleisigen Ausbaus der Tauernbahn-Südrampe wurde die alte Strecke unter anderem durch die neue gigantische Pfaffenberg - Zwenberg-Brücke ersetzt, die das Tal von A nach B überbrückt (s. Bild). Auf Grund des dichten Bergwaldes gestalteten sich die Vermessungsarbeiten sehr schwierig und konnten nur aus größerer Entfernung vorgenommen werden.



Der Punkt C entspricht etwa dem Standort des Fotografen dieses Bildes! Daher wurden von einem Punkt C der Talsohle folgende Winkel und Entfernungen gemessen:

Höhenwinkel \sphericalangle nach A: $7^{\circ}03'32''$	Entfernung CA: 935m
Höhenwinkel \sphericalangle nach B: $5^{\circ}37'54''$	Entfernung CB: 1071m
Horizontaler Schwenkungswinkel des Theodoliten: $20^{\circ}19'15,8''$	

- a) Wie viele Meter befinden sich die Punkte A und B über der Talsohle?
- b) Wie lang ist die Brücke und wie viele Promille Steigung hat sie?
- c) Welche Vereinfachungen waren bei deinen Berechnungen nötig? Begründe!
- d) Formuliere und beweise den Sinussatz!

Beispiel 4:

- a) Leite das Zerfallsgesetz für den radioaktiven Zerfall einer Substanz ab und begründe jeden deiner Rechenschritte!
- b) Stelle einen Zusammenhang zwischen der Zerfallskonstante λ , und der Halbwertszeit T her!
- c) Das Kohlenstoffisotop C^{14} hat eine Halbwertszeit $\vartheta = 5600a$.
- c1) Ermittle das Zerfallsgesetz und den Wert der Zerfallskonstante!
- c2) Bestimme das Alter eines Materials, dessen C^{14} -Gehalt auf 7% des ursprünglichen Wertes abgesunken ist!
- c3) Wie viel Gramm C^{14} sind nach 4000 Jahren von einer Ausgangsmenge mit 100g noch übrig?
- d) Die nachstehende Tabelle gibt einige radioaktiven Substanzen mit ihren Halbwertszeiten an, die 1988 bei der Reaktorkatastrophe in Tschernobyl freigesetzt wurden. Gib für jeden Stoff das Zerfallsgesetz an. Stelle die Abklingkurven von K^{40} und Sr^{90} für einen Zeitraum von 200 Jahren auf beiliegendem Millimeterpapier mit sinnvollen Einheiten grafisch dar.

Radioaktiver Stoff	K^{40} (Kalium)	Sr^{90} (Strontium)	I^{131} (Jod)
Halbwertszeit	$1,3 \cdot 10^9 a$	28a	8d

Punktebewertung:

Beispiel 1				Beispiel 2						Beispiel 3				Beispiel 4					
a	b	c	d	a	b	c1	c2	c3	d	a	b	c	d	a	b	c1	c2	c3	d
4	1	3	4	2	2	2	2	2	2	3	4	2	3	3	2	2	2	1	2
gesamt: 12 Punkte				gesamt: 12 Punkte						gesamt: 12 Punkte				gesamt: 12 Punkte					
Maximal erreichbare Punkteanzahl: 48 Punkte																			
0-23 Pkt.: Nicht genügend; 24-31 Pkt.: Genügend; 32-39 Pkt.: Befriedigend; 40-44 Pkt.: Gut; 45-48 Pkt.: Sehr gut																			

Bundesrealgymnasium und Bundes-
Oberstufenrealgymnasium
A-3100 St. Pölten, Schulring 16

8C-Klasse(1998/99)

1. Aufgabe:

Mechanische Unruhen in Uhren, Federungseinrichtungen in Kraftfahrzeugen und Eisenbahnwaggons und elektrische Schwingkreise erzeugen bei einer einmaligen Erregung, ohne weiteren Antrieb, eine gedämpfte Schwingung der Form:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

- a) Wie groß ist die Dämpfungskonstante δ , wenn bei $t = \frac{5 \cdot \pi}{2 \cdot \omega}$ s und $T = 2 \cdot \text{Bs}^{-1}$ die zugehörige Auslenkung $y(t)$ der gedämpften Schwingung um 40 % kleiner als die ungedämpften Schwingung ist? (auf 5 Dez.)
Nehme für die weiteren Berechnungen eine ursprüngliche Auslenkung y_0 mit 5 Einheiten an! Wie lautet nun die Funktion der gedämpften Schwingung?
- b) Es ist zu zeigen, dass die Kurve der gedämpften Schwingung zwischen ihren beiden Einhüllenden $y(t) = +y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ und $y(t) = -y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ liegt. Skizziere dazu die gedämpfte Schwingung und die beiden Einhüllenden! Berechne die Berührungspunkte der Dämpfungskurve mit ihrer Einhüllenden $y(t) = +y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ im Intervall $t \in [0, 3]$ s.
- c) Wie läßt sich nachweisen, dass die Kurven einander berühren und nicht bloß schneiden? Zeige, dass die Schwingungsextrema nicht mit den Berührungsstellen zusammenfallen!
- d) Sind die Wendepunkte der Dämpfungskurve - so wie bei der Sinuskurve - mit ihren Nullstellen identisch? Begründung!

2. Aufgabe:

- a) Die Weltbevölkerung betrug 1950 etwa 2,515 Milliarden Menschen, 1989 etwa 5,201 Milliarden Menschen. Wir nehmen „überexponentielles“ Wachstum an, die dazugehörige Differentialgleichung lautet:

$$dy = k \cdot y^2 \cdot dt$$

Ermittle die Wachstumsfunktion zuerst allgemein und dann für die gestellte Aufgabe. Erstelle eine Wertetabelle für die Wachstumsfunktion der Weltbevölkerung in den Jahren 1950 bis 2020 für jedes zehnte Jahr. Interpretiere diese Ergebnisse und vergleiche - soweit wie möglich - mit den tatsächlichen Werten! Gib ein geeignetes Zeitintervall an und was wäre am Ende deines Intervall zu erwarten! Skizziere die Funktion!

- b) Eine Bakterienkultur wächst in einer Nährlösung; diese kann höchstens 105 000 Individuen aufnehmen. Zunächst werden 1 000 Individuen in die Nährlösung gegeben; nach vier

Stunden sind es bereits 3000. Wie viele sind es nach acht Stunden? Wann hat die Nährlösung eine Auslastung von 95 % erreicht? Stelle unter Annahme logistischen Wachstums die Differentialgleichung und die zugehörige Wachstumsfunktion auf und beantworte dann die gestellten Fragen. Wodurch ist ein logistisches Wachstum gekennzeichnet?

3. Aufgabe:

- a) Zwei Orte A und B liegen in einer Ebene 12,5 km voneinander entfernt. Ein Flugzeug, das im geraden Horizontalflug über die beiden Orte (von A in Richtung B) direkt hinwegfliegt, wird gleichzeitig in A unter dem Höhenwinkel $79,5^\circ$ und in B unter $37,94^\circ$ gemessen. Nach 30 s wird eine zweite Peilung vorgenommen und es werden die Winkel in A mit $\alpha' = 38,83^\circ$ und in B mit $\beta' = 77,28^\circ$ gemessen. Bestimme die Höhe h und die Geschwindigkeit v des Flugzeuges. (Keine Instrumentenhöhe). Visualisiere durch eine Skizze!
- b) Ein vom Flugzeug abgeworfener Gegenstand beschreibt unter Einwirkung der Schwerkraft und unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes eine Parabelbahn. Die Parabelbahn setzt sich zusammen aus: Weg in die x-Richtung $x = v \cdot t$, Weg in die y-Richtung $y = h - \frac{g \cdot t^2}{2}$.
Zeige, dass ein genau über A vom Flugzeug abgeworfener Gegenstand unter den gegebenen Annahmen ziemlich genau im Punkt B auf die Erde fällt. ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

4. Aufgabe:

Nach der Einführung der Autobahnvignette in Österreich betrug Statistiken zufolge der Anteil der AutobahnbenutzerInnen, die keine Vignette geklebt haben, 3 %.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem Autobahnrastplatz nicht alle der zwölf parkenden Autos eine Vignette geklebt haben?
- b) Eine Polizeistreife überprüft täglich etwa 400 Autos auf Autobahnen.
 *) Wie viele FahrerInnen ohne Vignette wird diese Streife im Mittel täglich antreffen?
 **) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an einem Tag mehr als 15 FahrerInnen ohne Vignette anzutreffen? Interpretiere das Ergebnis!
- c) Wie oft muss eine Polizeistreife kontrollieren, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1 FahrerInn ohne Vignette anzutreffen, 95 % übersteigt?
- d) In welchem Bereich liegt mit 80 %iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der FahrerInnen ohne Vignette, die die Polizeistreife an einem Tag antrifft? Visualisiere durch eine Skizze!

Punkteverteilung:

1. Beispiel: 14 Punkte
2. Beispiel: 14 Punkte
3. Beispiel: 10 Punkte
4. Beispiel: 10 Punkte

Gedanken zur Erstellung von Maturaaufgaben

Viele dieser Gedanken gelten wohl nicht nur für die Matura, sondern auch in gleicher oder ähnlicher Weise für Schularbeiten.

Wie könnten TI-92 spezifische Beispiele aussehen?

Wie weit sollen Schüler bei der RP experimentieren? ⇨ Keinesfalls !!

Es müssen wohl auch "Standardbeispiele" vorkommen.

Schwache Schüler müssen auch die Chance auf eine gute Note haben.

Wie weit werden die grafischen Fähigkeiten des Rechners zugelassen (Taste F5) ?

Die RP kann wohl nur eine letzte, etwas längere Schularbeit sein.

Die verlangten Techniken müssen geübt worden sein.

Wie weit wirkt sich der frühe Abgabetermin (Anfang Februar) auf die Aufgabenstellung aus. Wie weit werden die letzte Stoffgebiete berücksichtigt?

⇨ kann in NÖ bei Bedarf geändert werden.

Kann man die RP teilen? Einige Beispiele sollen mit, und einige ohne TI-92 gerechnet werden. ⇨ praktisch nicht durchführbar.

Sollen verschiedene Lösungswege abgefragt werden? ⇨ durchaus möglich!

Textaufgaben dürfen nur dort vorkommen, wo sie auch schon vorher im Unterricht geübt wurden.